第2回 和田杯

灘校数学研究部

第69回灘校文化祭(2015年5月2日～3日)

昨年始動の新企画！今年も部員たちの名問・難問・奇問が揃い踏み！頭を悩ませて問題を解く喜びを味わってみませんか？解けなくても大丈夫,5月3日の最終講義(14:00～15:30)において部員たちが責任持って解説いたします.是非足を運んでみてください！
時間制限は,文化祭開始から解説の時間までです！質問や答え合わせは受付までお気軽にどうぞ.答案を書いて受付へ持ってきてくだされば,部員が正誤を判定いたします.正解した問題数に応じて豪華景品も贈呈！どしどし挑戦してください！

1. $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=1$なる任意の正実数$k,l,m$について,以下の不等式が成り立つことを示せ.

$$\sqrt{k+lm}+\sqrt{l+mk}+\sqrt{m+kl} \geq \sqrt{k}+\sqrt{l}+\sqrt{m}+\sqrt{klm}$$

2. 台形ではない四角形PQRSが中心Oの円に内接している.△OPRと△OQSの外接円の交点のうちOでない方をT,PQとRSの交点をU,PSとQRの交点をVとする.またOからSP,PQ,QR,RSにそれぞれ下ろした垂線の足をA,B,C,Dとする.このとき以下を示せ.
(1)U,T,Vは同一直線上にある.
(2)V,T,A,C・U,T,B,Dはどちらもそれぞれ同一円周上にある.

3. $\cos 0, \cos\frac{2}{2015}\pi, \cos\frac{4}{2015}\pi, \dots, \cos\frac{4028}{2015}\pi$の69次基本対称式を求めよ.

4. pを奇素数とする.kを$0 \le k \le p-1$なる整数とする.ここで,自然数nに対して$m = np + k$とした時の,集合$\{1,2,3,\dots,m\}$の部分集合でかつ要素の和がpの倍数であるようなものの個数をa_nとする(ただし空集合の要素の和は0とする).
この時,a_{n+1}をa_nで表せ.

5. 正$2n$角形の$2n$本の辺を時計回りに$l_1, l_2, \dots, l_{2n}$とする.またその中心をOとする.Oと各頂点の距離は1とする.平面上の点Kについて,まずKをl_1について対称移動し,そうして得られた点をl_2について対称移動し,...,と順に繰り返し,l_{2n}について対称移動を行った時点でこの操作を終え,得られた点をLとする.
(1)KLの長さはKの位置によらず一定であることを示せ.
(2)上記KLの長さを$d(n)$とする時,$\lim_{n\to\infty} d(n)$を求めよ.

6. 3次方程式$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$がある.正整数nについて,$|b|, |c|, |d| \le n$なる整数b, c, dを無作為に選ぶ時,この方程式の解が全て整数解となる確率をP_nとおく.$\lim_{n\to\infty} P_n$を求めよ.

7. 鋭角三角形ABC(ただしAB≠AC)において,中心をIに持つ内接円ωがABと点Xで,ACと点Yで接しているとする.またBCの中点をMとし,Mを通りAIに垂直な直線をlとする.lとXC,YBの交点を各々S,Tとし,S,Tを中心としてωに直交する円と,C,Bを中心として半径の長さがBX,CYに等しい円の交点のうちAと反対側にあるものを各々K,Lとする時,BYとCXの交点,BKとCLの交点およびMは同一直線上にあることを示せ.

8. 関数$f_n(x)$を以下のように定める.
・$f_0(x) = f_1(x) = 3x - 1$
・$f_{n+1}(x) = (36x^2 - 24x + 2)f_n(x) - f_{n-1}(x) (\forall n \in \mathbb{N})$
この時,以下の方程式を解け.

$$\sum_{n=1}^{2015} f_n(x) = \frac{1}{2}$$

9. kを正整数とする.相異なるとは限らないk個の素数の積で表される整数を小

さい順に$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$とする.また,任意の正整数$m$に対し,$\sigma(m)$で$m$の正の約数の総和を表すとする.この時,次の不等式を示せ.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(a_n)}{a_n} \leq (k-1)\log 2 + 1$$

以上

作問者(提供ありがとう！)								
1.藏田	2.古川	3.中山	4.藏田	5.藏田	6.中山	7.藏田	8.中山	9.藏田

この企画は,灘中入試模試の数学バージョンを,という部員たちの気持ちが形になり去年から始まったものです.和田杯という名前は,在学当時数研に在籍なさっていた現校長,和田孫博先生の名前からお借りしました.毎年この文化祭には幅広い年齢層のお客様が来てくださいます.それに伴い,算数だけでなく数学でも問題を解く,解答を知る喜びを共有したいなぁと思い,この企画が発足するに至ったわけです.

さて,そんなわけで始まったこの企画も第2回を開催する運びとなりました.問題数こそ去年より若干減ったものの,クオリティは同等もしくはそれ以上である,と思います(私の自己満足的な面も否めませんが).問題を解くことはマジックのタネを考えることに似ています.頭をひねってタネを暴いたり,タネ明かしを受けて感動したりする,そんな喜びを皆さんに感じてもらえたら幸いです.

また,私の怠慢故に問題募集の締め切りまでの期間が短かったり,去年作問をメインで担当なさっていた67回生の方々が引退されたりと苦労もありましたが,なんとか無事完成させることができたのも,様々な面で協力してくれた部員たちのおかげだと思います.本当にありがとう！来年はもっと時間をとって山のように作問してもらうぞ(小声)

・採点及び質問は,文化祭中は受付まで,終了後はメールまたは郵送でお願いいたします.お気軽にどうぞ！

郵送先(返信用切手の同封お願いいたします)
〒658-0082　神戸市東灘区魚崎北町8-5-1　灘校数学研究部

メール先(責任者の藏田のアドレスです)
kurara1020roiji@gmail.com

・数研のTwitter公式アカウントです.日頃の活動などを呟いておりますので,是非フォローよろしくお願いします！
@nada_math_club

文責　高校2年4組34番　藏田 力丸

※これは文化祭中に発見した誤植,ミスをすべて修正した改訂版です.そのため,文化祭中に配布したものとはやや異なります.